

# 多时间步长时域有限差分法

郑阳明<sup>1,2</sup>, 褚庆昕<sup>1</sup>

(11 华南理工大学电子与信息学院, 广东广州 510640; 21 西安电子科技大学电子工程学院, 陕西西安 710071)

**摘要:** 本文提出的多时间步长有限差分(MTS-FDTD)法针对不同网格尺寸区域采用不同时间步, 从而减少了计算时间. 应用例子表明, MTS-FDTD法比ETS-FDTD法计算时间减少了42%以上.

**关键词:** 非均匀网格; 多时间步长; 时域有限差分法

**中图分类号:** TN015 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2004)09-1504-03

## Mult2Time2Step Finite2Difference Time2Domain Method

ZHENG Yang2ming<sup>1,2</sup>, CHU Qing2xin<sup>1</sup>

(11 College of Electronic and Information Engineering, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510640, China ;

21 School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

**Abstract:** To keep the stability, the time step length of traditional equaltime2step non2uniform finite2difference time2domain (ETS-FDTD) method is determined by the minimized grid size, which results in a long computational time. A mult2time2step finite2difference time2domain (MTS-FDTD) method is presented, which uses different time step lengths in different grid regions to reduce computational time. Numerical results demonstrate that MTS-FDTD method reduces more than 42 percent of computational time than ETS-FDTD method.

**Key words:** non2uniform grid; multi2time2step; FDTD method

### 1 引言

近年来, 时域有限差分(FDTD)法得到了广泛的应用<sup>[1~3]</sup>. 在实际问题模拟中, 由于所涉及的结构尺寸大小不一, 通常采用等时间步长的非均匀网格的FDTD(ETS-FDTD)法. 为了保证FDTD的数值稳定性, 时间步长的选取必须以最小的网格尺寸为标准, 结果造成计算时间长. 为了解决这个问题, 本文提出在大网格区域使用大时间步长, 在小网格区域应用小时间步长的多时间步长时域有限差分(MTS-FDTD)法, 从而减少了计算量, 达到了加速计算的目的. 在该方法中, 关键的问题是处理好由于不同区域采用不同时间步长所造成的整体网格在时间进度不一致的问题.

为了验证方法的有效性, 使用该方法计算了微带天线和微带低通滤波器的特性. 结果表明, MTS-FDTD法在计算精度相同的条件下, 计算时间比传统ETS-FDTD法节省42%以上.

### 2 多时间步长时域有限差分法

考虑图1所示的非均匀网格区域,  $\tilde{N}$ 区为大网格区域,  $\tilde{O}$ 区为小网格区域. 在大网格区域 $\tilde{N}$ 采用大时间步长 $\Delta t_L$ , 在小网格区域 $\tilde{O}$ 采用小时间步长 $\Delta t_s$ . 设小时间步长区域完成 $m$

次步进时恰好与大时间步长区域步进一次同步. 由于FDTD方法中时间步进是通过电场与磁场分量之间相互更新而完成的, 因此为了保证小时间步长区域中电场和磁场分量相互更新 $m$ 次与大时间步长区域中电场和磁场分量相互更新一次保持同步,  $m$ 应该为奇数, 即

$$\Delta t_L = m \Delta t_s, \quad m = 3, 5, 7,$$

图2描绘了电场和磁场分量在时间和空间上的分布. 为了叙述清楚, 以 $m=3$ 的情况为例. 设在不同网格区域的交界面上为电场分量, 并且交界面属于小时间步长区域. 交界面的空间位置为 $(i, j, k)$ . 在时间轴上的虚线表示计算磁场的时刻, 实线则表示计算电场的时刻. 为了能够清楚描述场量之间的时间关系, 我们在时间轴的不同时间层上分别标以0)6的标号. 区域 $\tilde{N}$ 的电场和磁场分别在0, 3, 6的时间层上更新; 区域 $\tilde{O}$ 的电场和磁场则在0, 1, 2, 3, 4, 5, 6的时间层上更新.

在区域 $\tilde{O}$ 以小时间步长进行从E到H、H到E和E到H三个半时间步长步进, 同时在区域 $\tilde{N}$ 以大时间步长完成从E

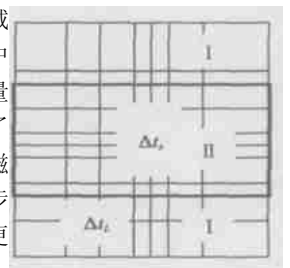


图1 非均匀网格区域

到 H 的一次半时间步长步进;接着在区域 0 以小时时间步长再进行从 H 到 E、E 到 H 和 H 到 E 又三个半时间步长步进,同时在区域 N 以大时间步长完成从 H 到 E 的又一次半时间步长步进,以这样的顺序在全网格空间完成一次完整的时间步进.

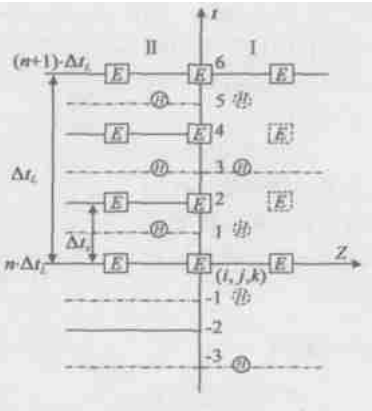


图2 电场和磁场在时间和空间上的分布图

在场量处理过程中,关键的问题是如何更新交界面的场量,尤其是在区域 0 的第 2 和第 6 时间层上交界面上场分量的更新.对于其它时刻和其它位置的场量可以直接应用标准的 FDTD 法.

首先,对于第 2 时间层上交界面上电场分量,以  $E_x$  为例, FDTD 公式为

$$\frac{E_x^2(i, j, k) - E_x^0(i, j, k)}{\Delta t_s} = -\frac{H_y^1(i, j, k) - H_y^1(i, j, k-1)}{E_0 \Delta z} - \frac{H_z^1(i, j-1, k) - H_z^1(i, j, k)}{E_0 \Delta y} \quad (1)$$

注意到,式(1)中的  $H_y^1(i, j, k)$  项已经跨入区域 N,而在同一时刻,区域 N 中并没有设置对应的第 1 时间层磁场分量.为此,我们引入虚磁场分量,记为  $H_y^1(i, j, k)^a$  (所有的虚量都以  $a$  为标志),它满足的 FDTD 方程为

$$\frac{H_y^1(i, j, k)^a - H_y^1(i, j, k)^a}{\Delta t_s} = -\frac{E_x^0(i, j, k+1) - E_x^0(i, j, k)}{L_0 \Delta z} - \frac{E_z^0(i, j, k) - E_z^0(i+1, j, k)}{L_0 \Delta x} \quad (2)$$

采用时间平均算法,有

$$H_y^1(i, j, k)^a = \frac{H_y^1(i, j, k)^a + H_y^3(i, j, k)}{2} \quad (3)$$

将式(3)代入式(2)得到

$$\frac{H_y^1(i, j, k)^a - H_y^3(i, j, k)}{2 \Delta t_s} = -\frac{E_x^0(i, j, k+1) - E_x^0(i, j, k)}{L_0 \Delta z} - \frac{E_z^0(i, j, k) - E_z^0(i+1, j, k)}{L_0 \Delta x} \quad (4)$$

从式(4)中解出  $H_y^1(i, j, k)^a$  项,代入式(1),就可以得到  $E_x^2(i, j, k)$  的 FDTD 公式.

计算区域 0 第 6 时间层的  $E_x$  时,引入虚磁场分量  $H_y^5(i, j, k)^a$ ,它满足的 FDTD 公式为

$$\frac{H_y^5(i, j, k)^a - H_y^3(i, j, k)}{\Delta t_s} = -\frac{E_x^4(i, j, k+1) - E_x^4(i, j, k)}{L_0 \Delta z} - \frac{E_z^4(i, j, k) - E_z^4(i+1, j, k)}{L_0 \Delta x} \quad (5)$$

对于式(5)中虚电场分量  $E_x^4(i, j, k+1)^a$ ,应用与计算区域 0 中第 2 时间层的虚磁场分量的同样的方法,有

$$\frac{E_x^4(i, j, k+1)^a - E_x^2(i, j, k+1)^a}{\Delta t_s} = -\frac{H_y^3(i, j, k) - H_y^3(i, j, k+1)}{E_0 \Delta z} + \frac{H_z^3(i, j, k+1) - H_z^3(i, j-1, k+1)}{E_0 \Delta y} \quad (6)$$

以及

$$E_x^2(i, j, k+1)^a = \frac{E_x^4(i, j, k+1)^a + E_x^0(i, j, k+1)}{2} \quad (7)$$

将式(6)和(7)代入式(5)求解出  $H_y^5(i, j, k)^a$ .然后利用类似于式(1)的过程得到  $E_x^6(i, j, k)$  的 FDTD 公式.对于其它时刻其它的场分量,完全可以采用上文同样的方法进行处理.

上面的推导虽然以  $m=3$  为例,但对于  $m=5, 7$  的情况处理完全相同,只需要适当增加虚场量的处理即可.对于二维和三维问题,处理思路也一样,只是对于角点的处理,需要多增加一个虚拟场量.由于篇幅所限,这里不再赘述.

从上文的叙述中,可以看到 MTSFDTD 法在对场量的处理时处处采用中心差分,因此 MTSFDTD 法保持了传统 FDTD 法的二阶精度.在 MTSFDTD 计算中,大、小时间步长都要满足 Courant 稳定性条件,因此保证了整体算法的稳定性.

可以看到,MTSFDTD 法完成一次完整的步进包括两部分:大网格区域以大时间步长  $\Delta t_s$  的 1 次步进和小网格区域以小时时间步长  $\Delta t_s$  的  $m$  次步进.而对于传统的 FDTD 法则需要在整体网格上以小时时间步长  $\Delta t_s$  步进  $m$  次.设  $T_1$  和  $T_2$  分别为计算一次大网格区域场分量和计算一次小网格区域场分量所需要的时间,则 MTSFDTD 法完整地一次步进相对于传统 ETSFDTD 法减少的计算量为

$$R = m(T_1 + T_2) - (T_1 + m T_2) = (m-1)T_1, \quad m=3, 5, 7, \quad (8)$$

显然,  $m$  或  $T_1$  越大,减少的计算时间就越多.

### 3 数值结果

为了验证该方法的精度和效率,用 MTSFDTD 法计算了文献[4]中给出的微带天线和低通滤波器的例子,并与 ETSFDTD 法的结果进行了比较.为了有效地显示方法的特性,例子中只在一维方向采用了非均匀网格.但本方法同样可以应用于二维和三维非均匀网格的例子.

#### 3.1 微带天线

微带天线的结构和尺寸如图 3 所示,其非均匀网格剖分如图 4 所示.小时时间步长区域 0 位于 Y 方向 36 到 82 网格

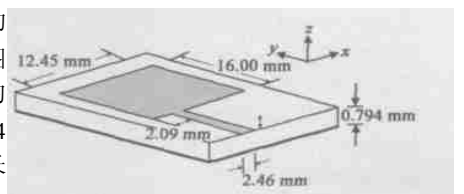


图3 微带天线结构与尺寸

处.非均匀网格尺寸为:  $dx = 0.415 \text{ mm}$ ,  $dy = 0.380 \text{ mm}$ ,  $dy_{\min} =$

01078mm 以及  $dz = 01397\text{mm}$ . 总网格数为  $40 @ 120 @ 16$ . 基片厚度为  $01794\text{mm}$ , 介电常数  $\epsilon_r = 212$ . 在传统 ETS-FDTD 法中使用  $t = 21458736 @ 10^{-13}\text{s}$ . 在 MTS-FDTD 法中  $t_L = 71376 @ 10^{-13}\text{s}$ ,  $t_s = 21459 @ 10^{-13}\text{s}$ . 两种方法计算得到的反射特性如图 5 所示. 可以看到计算结果非常吻合. 在 CPU 为 500MHz 的计算机上, 时间步进  $21212862\text{ns}$ , ETS-FDTD 法

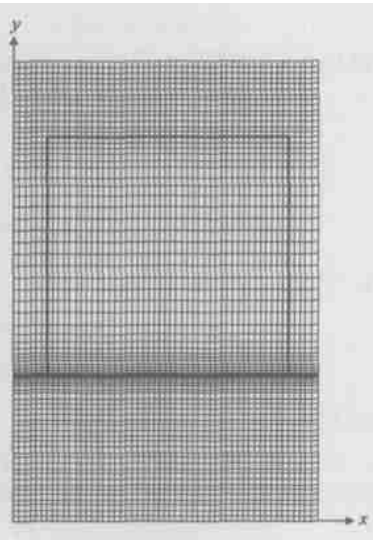


图 4 微带天线网格剖分

用时 1824s, MTS-FDTD 法计算用时则为 1044s, MTS-FDTD 法计算时间节省了 42176%.

### 3.1.2 低通滤波器

低通滤波器的实际结构和尺寸如图 6 所示, 其非均匀网格剖分如图 7 所示.

小时间步长区域位于 Y 方向 30 到 60 网格处. 非均匀网格尺寸为:  $dx = 014064\text{mm}$ ,  $dy = 0138\text{mm}$ ,  $dy_{\min} = 01078\text{mm}$ ,

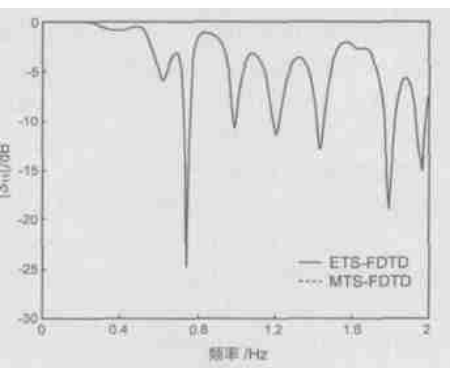


图 5 微带天线的反射特性

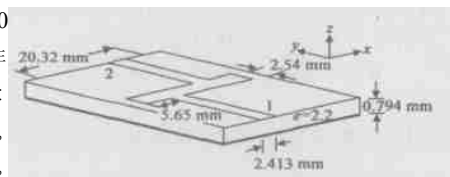


图 6 低通滤波器的结构和尺寸

$dz = 01397\text{mm}$ . 在传统的 ETS-FDTD 法中,  $t = 21457008 @ 10^{-13}\text{s}$ . 在 MTS-FDTD 法中,  $t_L = 71371 @ 10^{-13}\text{s}$ ,  $t_s = 21457 @ 10^{-13}\text{s}$ . 总网格数为  $65 @ 100 @ 12$ . 基片参数与微带天线的一样. 计算得到的传输特性如图 8 所示. 同样, 两种方法的计算结果非常吻合. 在 CPU 为 500MHz 的计算机上, 时间步进  $212113075\text{ns}$ , 传统 FDTD

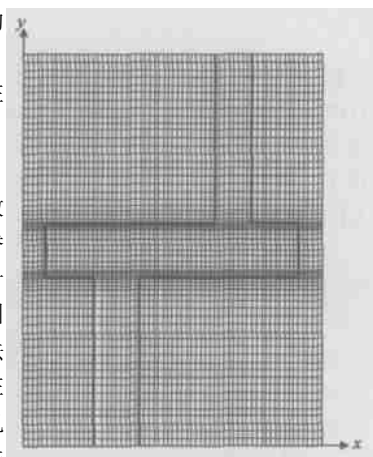


图 7 低通滤波器网格剖分

法用时 2360s, 而 MTS-FDTD 法仅用时 1273s, 计算时间节省了 46107%.

上述两个例子, 都采用高斯脉冲作为激励源. 吸收边界采用 Mur 一阶吸收边界条件.

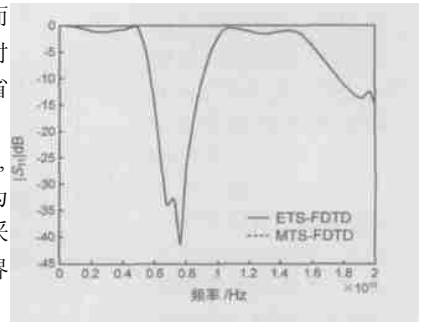


图 8 低通滤波器的传输特性

## 4 结论

本文针对传统 ETS-FDTD 法的计算量大的问题, 提出了多时间步长 FDTD 法. 在大尺寸网格区域使用大时间步长, 在小尺寸网格区域使用小时间步长, 从而减少了计算量, 提高了计算速度.

## 参考文献:

- [ 1 ] K S Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equation in isotropic media[J]. IEEE Trans Antennas Propagation, 1966. AP214(5): 302- 307.
- [ 2 ] 高本庆. 时域有限差分法[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.
- [ 3 ] A Taflov. Computational Electrodynamics—the Finite-Difference Time-Domain Method[M]. USA: Artech House, 1995.
- [ 4 ] D M Sheen, S M Ali, M D Abrouzaha, J A Kong. Application of the three-dimensional finite-difference time-domain method to the analysis of planar microstrip circuits[J]. IEEE Trans Microwave Theory and Tech, 1990, 38(7): 849- 857.

## 作者简介:



**郑阳明** 男, 1978 出生于浙江, 西安电子科技大学博士研究生, 主要研究方向为微波集成电路的时域建模.



**褚庆昕** 男, 1958 出生于山东, 华南理工大学电信学院教授、博士生导师, 射频与无线技术研究所所长, 并任中国电子学会高级会员, 微波学会委员, IEEE member. 研究方向包括射频与微波电路、有源集成天线与空间功率合成和时域计算电磁学.